IX

OLM cl. a IX

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$[x]\cdot\{x\} = x\cdot|x|$$

Gheorghe Andrei (GMB)

Soluție

$x\in\mathbb{R}$ - soluție. Notăm $p=[x]$ și $t=\{x\}$.

Dacă $x\geq 0 \Rightarrow pt=(p+t)^2 \Leftrightarrow p^2+pt+t^2=0 \Leftrightarrow$ (3p)

3p $\Leftrightarrow \left(p+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}=0 \Leftrightarrow p=t=0 \Leftrightarrow x=0$, care verifică ecuația!

Dacă $x<0 \Rightarrow pt=-(p+t)^2 \Leftrightarrow p^2+3pt+t^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{t}{p}\right)^2+3\frac{t}{p}+1=0 \Leftrightarrow t=p\cdot\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ sau $t=p\cdot\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Pentru

3p $t=p\cdot\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, rezultă $t>1$.

Pentru $t=p\cdot\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\in[0,1) \Rightarrow p\in\left(\frac{2}{\sqrt{5}-3},0\right]\cap\mathbb{Z}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow p\in\{-2,-1\}$. (3p)

Obținem $x=-2+3-\sqrt{5}=1-\sqrt{5}$ și $x=-1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

1p care verifică ecuația. Deci $x\in\left\{0, 1-\sqrt{5}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (1p)

IX

OLM cl a IX-a

2.) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a^2+b^2=1$ și $x>0$.

Să se arate că

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{x+1}}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{x+1}}+\frac{b}{\sqrt{x}}\right) \leq 1+\frac{1}{x}.$$

Gabriela Constantinescu

3p $$\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{x+1}}\right)^2 \leq (a^2+b^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)=\frac{2x+1}{x(x+1)}<\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}=$$

$$=\frac{x+1}{x}$$ ~~3p~~

2p $$\left(\frac{a}{\sqrt{x+1}}+\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^2 \leq (a^2+b^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right) < \frac{x+1}{x}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{x+1}}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{x+1}}+\frac{b}{\sqrt{x}}\right) \leq \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{x+1}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{x+1}}+\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^2}{2} \leq \frac{\frac{2x+2}{x}}{2}=$$

2p $$=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$$

<u>sau</u> se desfac parantezele.

IX

OLM cls a IX-a.

(3.) Se consideră paralelogramele ABCD, CEFG și FHAI. Să se arate că dacă M și N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor BEH respectiv DIG, atunci centrul de greutate al triunghiului ACF este mijlocul segmentului MN.

Cătălin Zîrnă

Fie P mijl. lui [MN]. și O - punct oarecare

(1p) $\vec{OB}+\vec{OE}+\vec{OH} = 3\vec{OM}$

(1p) $\vec{OD}+\vec{OI}+\vec{OG} = 3\vec{ON}$ (+)

(1p) $\underbrace{(\vec{OB}+\vec{OD})}_{\vec{OA}+\vec{OC}}+\underbrace{(\vec{OE}+\vec{OG})}_{\vec{OC}+\vec{OF}}+\underbrace{(\vec{OH}+\vec{OI})}_{\vec{OF}+\vec{OA}} = 3(\vec{OM}+\vec{ON})$

(2p) $\vec{OA}+\vec{OC}$ $\quad$ $\vec{OC}+\vec{OF}$ $\quad$ $\vec{OF}+\vec{OA}$ (paralelograme)

(1p) $\vec{OM}+\vec{ON} = 2\vec{OP}$

$\Rightarrow 2(\vec{OA}+\vec{OC}+\vec{OF}) = 6\vec{OP}$

$\Rightarrow \vec{OA}+\vec{OC}+\vec{OF} = 3\vec{OP} \Rightarrow P$ c.g. $\triangle ACF$.

(1p)

CLASA A IX-A **OLM**

(4) Se dau punctele A_1, A_2, A_3 și A_4, conciclice, și H_1, H_2, H_3 și H_4 ortocentrele triunghiurilor: $\Delta A_2A_3A_4$, $\Delta A_1A_3A_4$, $\Delta A_1A_2A_4$ și $\Delta A_1A_2A_3$. Arătați că $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram $\Leftrightarrow$ $H_1H_2H_3H_4$ este dreptunghi

prof Dorin Arventiev

Sol

Fie O centrul cercului circumscris.

$$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} \quad \text{(Sylvester)} \quad 3p$$

$$\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{H_2H_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$ și analoagele; 1p

deci $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram $\Leftrightarrow$ $A_1A_2A_3A_4$ este paralelogram $\Leftrightarrow$ $A_1A_2A_3A_4$ este dreptunghi $\Leftrightarrow$ $H_1H_2H_3H_4$ este dreptunghi. 3p